



Studiamo la funzione $f(x) = x^2 - 4x + 3$. È un esempio perfetto perché permette di vedere quasi tutti i passaggi fondamentali senza troppi calcoli difficili.

Iniziamo!

1. Che cosa significa “studiare una funzione”?

Studiare una funzione significa capire:

- **dove è definita;**
- **dove è positiva o negativa;**
- **quali sono i suoi punti notevoli;**
- **come cresce o decresce;**
- **se ha massimi o minimi;**
- **come è fatta la sua curva.**

Alla fine dello studio si può fare anche un **grafico qualitativo**.

2. Dominio

Il **dominio** è l'insieme dei valori di x per cui la funzione ha significato. La funzione data è un **polinomio**, e i polinomi sono definiti per ogni numero reale. Quindi:

$$D = \mathbb{R}$$

Spiegazione

Non ci sono denominatori, radici quadrate o logaritmi che impongono condizioni. Perciò possiamo sostituire a x qualunque numero reale.

3. Intersezioni con gli assi

Intersezione con l'asse y

Per trovare l'intersezione con l'asse y , si impone $x = 0$:

$$f(0) = 0^2 - 4 \cdot 0 + 3 = 3$$

Quindi il punto di intersezione con l'asse y è:

$$(0, 3)$$

Intersezioni con l'asse x

Per trovare i punti in cui la funzione taglia l'asse x , si impone:

$$f(x) = 0$$

cioè:

$$x^2 - 4x + 3 = 0$$

Scomponiamo:

$$x^2 - 4x + 3 = (x - 1)(x - 3)$$

Quindi:

$$(x - 1)(x - 3) = 0$$

da cui:

$$x = 1 \text{ oppure } x = 3$$

I punti di intersezione con l'asse x sono:

$$(1,0) \text{ e } (3,0)$$

4. Segno della funzione

Studiamo quando $f(x)$ è positiva o negativa.

Abbiamo:

$$f(x) = (x - 1)(x - 3)$$

Gli zeri sono $x = 1$ e $x = 3$.

Dividiamo la retta reale in intervalli:

- $x < 1$
- $1 < x < 3$
- $x > 3$

Vediamo il segno dei fattori:

Se $x < 1$

- $x - 1 < 0$
- $x - 3 < 0$

Prodotto di due numeri negativi: **positivo**

$$f(x) > 0$$

Se $1 < x < 3$

- $x - 1 > 0$
- $x - 3 < 0$

Prodotto di positivo e negativo: **negativo**

$$f(x) < 0$$

Se $x > 3$

- $x - 1 > 0$
- $x - 3 > 0$

Prodotto di due positivi: **positivo**

$$f(x) > 0$$

Conclusione sul segno

$$f(x) > 0 \text{ per } x < 1 \text{ e } x > 3$$

$$f(x) = 0 \text{ per } x = 1, x = 3$$

$$f(x) < 0 \text{ per } 1 < x < 3$$



5. Simmetrie

Vediamo se la funzione è **pari** o **dispari**.

Calcoliamo:

$$f(-x) = (-x)^2 - 4(-x) + 3 = x^2 + 4x + 3$$

Questo non è uguale né a $f(x)$ né a $-f(x)$.

Quindi la funzione **non è né pari né dispari**.

6. Limiti agli estremi del dominio

Poiché il dominio è tutto $\mathbb{R}$, ha senso studiare il comportamento per $x \rightarrow +\infty$ e $x \rightarrow -\infty$.

La funzione è:

$$f(x) = x^2 - 4x + 3$$

Per valori molto grandi di x , il termine dominante è x^2 .

Quindi:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

e anche:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$$

Spiegazione

Il quadrato x^2 diventa molto grande e positivo sia per x molto grandi positivi, sia per x molto grandi negativi.

7. Asintoti

Gli asintoti si cercano soprattutto quando ci sono:

- frazioni,
- radicali,
- logaritmi,
- comportamenti particolari all'infinito.

Qui la funzione è un polinomio di secondo grado, quindi **non ha asintoti**.

8. Derivata prima

La derivata serve per studiare **quando la funzione cresce o decresce**.

La funzione è:

$$f(x) = x^2 - 4x + 3$$

Deriviamo:

$$f'(x) = 2x - 4$$

9. Studio del segno della derivata prima

Cerchiamo dove la derivata si annulla:

$$2x - 4 = 0$$

$$2x = 4$$

$$x = 2$$

Ora studiamo il segno di $f'(x)$:

- per $x < 2$, $2x - 4 < 0$, quindi $f'(x) < 0$
- per $x > 2$, $2x - 4 > 0$, quindi $f'(x) > 0$

10. Intervalli di monotonia

Dallo studio del segno della derivata otteniamo:

- la funzione è **decrecente** per $x < 2$
- la funzione è **crescente** per $x > 2$

Quindi:

$f(x)$ decresce in $(-\infty, 2)$

$f(x)$ cresce in $(2, +\infty)$

11. Massimi e minimi relativi

Nel punto in cui la derivata cambia segno da negativa a positiva, la funzione ha un **minimo relativo**.

Poiché questo accade in $x = 2$, calcoliamo il valore della funzione:

$$f(2) = 2^2 - 4 \cdot 2 + 3 = 4 - 8 + 3 = -1$$

Quindi il punto di minimo è:

$$(2, -1)$$

Conclusione

La funzione ha un **minimo relativo e assoluto** nel punto:

$$(2, -1)$$

Non ha massimo, perché per $x \rightarrow \pm\infty$ la funzione va a $+\infty$.

12. Derivata seconda

La derivata seconda serve per studiare la **concavità** della curva.

Abbiamo:

$$f'(x) = 2x - 4$$

Derivando ancora:

$$f''(x) = 2$$

13. Studio della derivata seconda

Poiché:

$$f''(x) = 2 > 0 \text{ per ogni } x$$

la funzione è sempre **concava verso l'alto**.

Significato geometrico

La parabola “apre verso l'alto”.

14. Punti di flesso



Un punto di flesso si ha quando la concavità cambia.

Ma qui:

$$f''(x) = 2$$

è sempre positiva, quindi la concavità **non cambia mai**.

Perciò la funzione **non ha punti di flesso**.

15. Riassunto finale dello studio

Funzione

$$f(x) = x^2 - 4x + 3$$

Dominio

$$D = \mathbb{R}$$

Intersezione con l'asse y

$$(0, 3)$$

Intersezioni con l'asse x

$$(1, 0), (3, 0)$$

Segno

- positiva per $x < 1$ e $x > 3$
- nulla per $x = 1$ e $x = 3$
- negativa per $1 < x < 3$

Limiti

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$$

Asintoti

Nessuno

Derivata prima

$$f'(x) = 2x - 4$$

Monotonia

- decrescente in $(-\infty, 2)$
- crescente in $(2, +\infty)$

Minimo

$$(2, -1)$$

Derivata seconda

$$f''(x) = 2$$

Concavità

Sempre verso l'alto

Flessi

Nessuno

16. Commento finale sul grafico

La funzione è una **parabola con concavità verso l'alto**.

Taglia:

- l'asse x nei punti $x = 1$ e $x = 3$,
- l'asse y nel punto $y = 3$.

Scende fino al punto minimo $(2, -1)$, poi ricomincia a salire.

